Bloque I: El Saber Filosófico.

Tema 4: La Lógica Formal.

1. Las proposiciones y sus tipos.

Una ***proposición*** es una oración enunciativa, es decir, una oración que afirma o niega algo y que puede ser verdadera o falsa.

Las proposiciones pueden ser simples o complejas. Una ***proposición simple*** es aquella que no puede descomponerse en partes que sean a su vez proposiciones. Las proposiciones simples se llaman también proposiciones atómicas. Una ***proposición compleja*** es aquella que puede descomponerse en proposiciones simples, también son llamadas proposiciones moleculares.

2. Los símbolos de la lógica proposicional.

2.1. Variables proposicionales.

En la Lógica Proposicional, para ***simbolizar las proposiciones*** simples se recurre a las letras minúsculas del alfabeto, comenzando por la letra ***"p"*** y después siguiendo el orden alfabético.

Para representar los ***valores de verdad*** de una proposición utilizaremos dos números el ***"1"*** y el ***"0"***. El número "1" representa que esa proposición es ***verdadera***, y el número "0" representa que esa proposición es ***falsa***.

2.2. Constantes proposicionales: Las conectivas o conectores.

Se denomina constantes lógicas o conectivas a las ***partículas*** que sirven para ***unir proposiciones simples y convertirlas en fórmulas complejas***. Las constantes lógicas más usuales son las siguientes:

a. Negador.

Se representa con este símbolo **"¬"**, y produce fórmulas del tipo "¬ p", "no es cierto que p", "no es p", "es imposible que p", etc.

Por definición el negador es aquella conectiva que ***invierte el valor de verdad*** de una proposición, es decir, la convierte en verdadera si es falsa, y en falsa si es verdadera. Esto se representa con la siguiente tabla de verdad:

p	¬
1	0
0	1

b. Conjuntor.

El conjuntor se representa con el símbolo **“∧”**, y da lugar a fórmulas del tipo “p∧q”, “p y q”.

Por definición el conjuntor es aquella conectiva que da lugar a fórmulas complejas que son ***verdaderas*** únicamente cuando son ***verdaderas las dos proposiciones que las componen***. Se representa con la siguiente tabla de verdad:

p	q	p ∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

c. Disyuntor.

El disyuntor se representa con el símbolo **“∨ ”**, dando lugar a fórmulas del tipo p∨q, “p o q”.

Por definición, el disyuntor es aquella conectiva que da lugar a fórmulas complejas que son ***verdaderas***, cuando al menos ***una de las proposiciones que las componen es verdadera***. Únicamente una disyunción es falsa cuando son falsas las proposiciones que la componen. Esto se representa con la siguiente tabla:

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

d. Condicional o implicador.

La condicional o implicador se representa con el símbolo**“→”**, dando lugar a fórmulas del tipo “p → q”, “sí p entonces q” o también “cuando p entonces q”.

Por definición la condicional es una conectiva que da lugar a fórmulas complejas que son ***verdaderas*** en todos los casos ***menos*** cuando siendo ***verdadero el antecedente*** (antes de la flecha) ***es falso el consecuente***.

p	q	p → q
1	1	1
1	0	**0**
0	1	1
0	0	1

e. Bicondicional o coimplicador.

La bicondicional o coimplicadora se representa con el símbolo **“↔”**, dando lugar a fórmulas del tipo “p↔q”, “p coimplica a q”, o también “si y sólo si p entonces q”, o “únicamente si p entonces q”.

La Bicondicional es aquella conectiva que da lugar a fórmulas complejas que son ***verdaderas*** cuando ***coinciden los valores de verdad de las proposiciones que las componen***.

p	q	p↔q
1	1	**1**
1	0	0
0	1	0
0	0	**1**

2.3. Los símbolos auxiliares: Paréntesis ( ) y corchetes [ ].

Al igual que en matemáticas estos símbolos marcan la ***prioridad*** de una conectiva sobre otra. Cuando en una fórmula hay varias conectivas tienen que quedar claro cual de ellas es la conectiva dominante: siempre será aquella que quede fuera del paréntesis. Por ejemplo:

- $(p \wedge q) \vee r$: ***Disyunción***.
- $p \wedge (q \vee r)$: ***Conjunción.***

Sin embargo existen excepciones por las llamadas ***reglas de economía de paréntesis***. Estas leyes son las siguientes:

1ª. El ***implicador y coimplicador*** tienen ***prioridad*** sobre el resto de las conectivas, esto quiere decir que no es necesario marcar con paréntesis que se trata de la conectiva dominante.

2ª. En fórmulas en las que se ***repite*** la misma conectiva si se trata de una ***conjunción*** o de una ***disyunción no es necesario marcar la prioridad con paréntesis***.

3. Tablas de verdad para cualquier fórmula.

Partiendo de las tablas de verdad de las conectivas es posible establecer la ***tabla de verdad*** de cualquier fórmula compleja. Para ello basta con ***descomponer la fórmula*** y establecer las tablas de verdad de sus componentes hasta alcanzar la tabla de verdad de la fórmula total. El ***procedimiento*** es el siguiente:

1º. Se ***simplifica*** las ***variables simples*** (p, q, r)

2º. Aparecen en la tabla las ***variables negadas***.

3º. Aparecerán los ***paréntesis más simples*** y después por orden de complejidad los demás paréntesis que aparecen en la fórmula hasta alcanzar la fórmula completa.

4º. Posteriormente, tienen que aparecer las posibles ***combinaciones de valores de verdad de las diferentes fórmulas simplificadas***, para ello nos remitiremos a las tablas de las ***conectivas***.

5º. Se ha de ***interpretar*** la tabla:

- Puede ser una ***contradicción***: cuando la fórmula siempre es ***falsa***.

p ∧ ¬ p

p	¬p	p∧¬p
1	0	0
0	1	0

- Puede ser una ***tautología***: cuando una fórmula es siempre ***verdadera***.

p∨ ¬ p

p	¬p	p∨¬p
1	0	1
0	1	1

- Puede ser una ***indeterminación***: Cuando una fórmula ***a veces es falsa y a veces es verdadera***.

p ∧¬ q

p	q	**¬q**	p ∧¬q
1	1	0	0
1	0	1	**1**
0	1	0	0
0	0	1	0

Ejercicio nº 1.

(p ∨ q) ∧ ¬ q → ¬ p

p	q	¬ p	¬ q	p ∨ q	(p ∨ q) ∧ ¬ q	Formula Completa
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1

Es una ***indeterminación***.

Ejercicio nº 2.

$\neg$ [(p $\vee$ q) $\rightarrow$ $\neg$ ($\neg$ p $\wedge$ $\neg$ q)]

p	q	$\neg$ p	$\neg$ q	p $\vee$ q	$\neg$ p $\wedge$ $\neg$ q	$\neg$ ($\neg$ p $\wedge$ $\neg$ q)	(p $\vee$ q) $\rightarrow$ $\neg$ ($\neg$ p $\wedge$ $\neg$ q)	F.C.
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0

Es una ***Contradicción***.

Ejercicio nº 3.

(p $\vee$ q) $\wedge$ r $\rightarrow$ $\neg$ p

p	q	r	$\neg$ p	p $\vee$ q	(p $\vee$ q) $\wedge$ r	(p $\vee$ q) $\wedge$ r $\rightarrow$ $\neg$ p
1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Es una ***indeterminación***.

Ejercicio nº 4.

$\neg$ (p $\vee$ q) $\rightarrow$ $\neg$ p $\wedge$ $\neg$ q

p	q	$\neg$ p	$\neg$ q	p $\vee$ q	$\neg$ (p $\vee$ q)	$\neg$ p $\wedge$ $\neg$ q	$\neg$ (p $\vee$ q) $\rightarrow$ $\neg$ p $\wedge$ $\neg$ q
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Es una ***Tautología***.

4. Tautología, contradicción e indeterminación.

Una ***tautología*** es una fórmula que es ***siempre verdadera*** sean cuales sean los valores de verdad de sus componentes. Las tautologías se denominan también leyes lógicas.

Una ***contradicción*** es una fórmula que es ***siempre falsa*** sean cuales sean los valores de verdad de sus componentes.

Una ***indeterminación*** es una fórmula que ***en unos casos es verdadera y en otros falsa***, en función de los valores de verdad de sus componentes.

5. La validez de los razonamientos.

Un ***razonamiento*** es un proceso lógico consistente en extraer o inferir un enunciado al que llamamos ***conclusión*** a partir de otros enunciados a los que llamamos ***premisas.***

Un ***enunciado es válido*** o coherente cuando ***de las premisas*** se sigue necesariamente ***la conclusión.*** Es decir, cuando las premisas son verdaderas a la vez, la conclusión tiene que ser necesariamente verdadera.

Para ***formalizar argumentos*** seguiremos el siguiente ***procedimiento***:

1º. Se ***formalizará cada una de las premisas*** que aparecen ***en líneas distintas*** y enumeraremos cada una de ellas.

2º. Se ***formalizará la conclusión*** que aparecerá precedida de este signo: |-------, que se lee “luego...”, “de modo que...”, “por consiguiente...”, etc.

Ejemplo de argumento:

“*Si apruebo 1º de Bachillerato será que los profesores son muy generosos o que mi madre ha hecho una novena a los santos. No es el caso que mi madre haga novenas a los santos, luego los profesores son muy generosos*”

Formalización del argumento:

1. $p \rightarrow (q \vee r)$
2. $\neg r$

|----------------

3. q

5.1. Comprobación de la validez de los argumentos mediante tablas de verdad.

Se puede hacer de ***dos maneras***:

1º. Consiste en convertir el argumento en una ***fórmula condicional*** en la que el ***antecedente*** está formado por las ***premisas unidas mediante conjuntores*** y la ***conclusión*** es el ***consecuente***. Se hace la ***tabla de verdad*** de dicha fórmula condicional y si el argumento es ***coherente*** el resultado será que esa fórmula es una ***tautología***.

Ejemplo:

(p → q) ∧ (p → q)

1. p → q
2. p

|-----------

3. q

p	q	p → q	(p → q) ∧ p	(p → q) ∧ (p → q)
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Es unas ***tautología***

2º. Consiste en ***compara*** los ***valores de verdad de las premisas*** con ***los valores de verdad de la conclusión***. De tal forma que si el argumento es coherente, cuando las premisas son verdaderas a la vez la conclusión también lo es.

Ejemplo:

1. p → q
2. ¬ q

|--------------

3. ¬ p

p	q	¬ q	¬ p	p → q
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Ejercicio nº 1.

Comprobar la validez de los siguientes argumentos mediante tablas de verdad de dos formas distintas

1. $(p \to q) \vee r$
2. $\neg r$

|-------------------

3. $p \to q$

$$[(p \to q) \vee r] \wedge \neg r \;\to\; (p \to q)$$

Antecedente   Consecuente

p	q	r	$\neg r$	$p \to q$	$(p \to q) \vee r$	$[(p \to q) \vee r] \wedge \neg r$	F.C.
1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Es una ***Tautología***.

5.2. Comprobación de la validez de los argumentos utilizando reglas de inferencia.

El procedimiento de las tablas de verdad resulta demasiado ***largo y complicado*** cuando las proposiciones que intervienen en el argumento llevan muchas variables proposicionales, por tanto se recurre a un procedimiento más rápido que son las ***reglas de inferencia***.

Las reglas de inferencia son ***verdades lógicas*** por definición (definen las conectivas) que nos permiten ***trasformar las premisas*** dadas hasta alcanzar la ***conclusión***. El procedimiento a seguir será también numerar las premisas transformadas haciendo constar en cada línea la regla de inferencia que hemos utilizado y las líneas a las que la hemos aplicado.

En último lugar, en la última línea, tiene que aparecer la ***conclusión*** que queremos demostrar.

5.3. Comprobación de reglas y esquemas de inferencia.

Las reglas de inferencia son normas que establece un modo válido de operar pasando de unas proposiciones a otras. Por ejemplo, una regla de inferencia es el ***Modus Ponens***: de una implicación y la afirmación de su antecedente tomadas como premisas se puede deducir el consecuente.

Como la definición de las reglas debe ser adaptada el lenguaje de la lógica, las reglas de inferencia se formalizan en esquemas de inferencia. Por tanto, un esquema de inferencia es una representación formal de una reglas de inferencia. En estas formalizaciones vamos a utilizar las conectivas pero en lugar de usar las variables proposionales (p, q, r, etc), usaremos las letras mayúsculas del alfabeto empezando por la letra “A”.

Por ***ejemplo***: Modus Pones

A → B
A
|-----------
B

6. Principales reglas de inferencia y ejercicios de aplicación.

Las reglas de inferencia se clasifican en reglas ***básicas*** y ***derivadas***.

- Las ***reglas básicas*** son verdades por definición, únicamente definen conectivas.
- Las ***reglas derivadas*** se demuestran a partir de las reglas básicas.
- Las ***reglas básicas*** se corresponden con cada una de las ***conectivas***, bien para ***introducirlas*** o bien para ***eliminarlas***.

6.1. Las Reglas Básicas.

a. Las Reglas Básicas del conjuntor son dos:

- La de ***Introducción del Conjuntor***.

De una proposición tomada como premisa y otra proposición también tomada como premisa, podemos concluir que la conjunción de ambas es necesariamente verdadera. Esquema:

A
B
|-----------
A ∧ B   I.C. (Introducción del Conjuntor)

- La de ***Eliminación del Conjuntor***.

De una conjunción tomada como premisa podemos concluir que cualquiera de las dos proposiciones que la componen es verdadera. Esquema:

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \qquad \text{E.C (Eliminación del conjuntor)}$$

Ejercicio nº 1.

1. $p \wedge q$
2. r $\quad$ |-- $q \wedge r$

3. q E.C. (1)
4. $q \wedge r$ I.C. (2,3)

Ejercicio nº 2.

1. p
2. q
3. $r \wedge s$ $\quad$ |----- $(p \wedge q) \wedge s$

4. s E.C. (3)
5. $p \wedge q$ I.C. (1,2)
6. $(p \wedge q) \wedge s$ I.C. (4,5)

Ejercicio nº 3

1. $p \wedge q \wedge r$
2. s $\quad$ |---- $r \wedge s$
3. r
4. $r \wedge s$

b. Reglas del disyuntor.

- ***Regla de Introducción del disyuntor***: de una proposición cualquiera tomada como premisa podemos concluir su disyunción con cualquier otra.

$$\frac{A}{A \vee B} \ \text{I.D} \qquad \frac{A}{B \vee A} \ \text{I.D}$$

Ejercicio nº 1.

1. $p \wedge q$ $\Big\}$ |--- $(r \vee s) \wedge p$
2. r

3. $r \vee s$ I.D. (2)
4. p E.C. (1)

|--

5. $(r \vee s) \wedge p$ I.C. (3,4)

Nota: La ***Introducción al disyuntor*** se aplica a más de una solo línea.

- ***Regla de Eliminación del Disyuntor***: de una disyunción tomada como premisa sí suponiendo cada una de las proposiciones que la componen llegamos a la misma conclusión, dicha conclusión es necesariamente verdadera.

$A \vee B$

A
.
.
.
C

B
.
.
.
C

|---------------

C E.D.

Nota: Lo que hay dentro del paréntesis son suposiciones, no está demostrado. Puede haber tantas líneas como sean necesarias.

Ejercicio nº 1.

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |-------- p

2. $p \wedge q$
3. p E.C (2)

4. $p \wedge r$
5. p E.C (4)

|------------------------------------

6. p E.D.(1, 2-3, 4-5)

Ejercicio nº 2.

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |-------- $p \vee r$

2. $p \wedge q$
3. p E.C (2)
4. $p \vee r$ I.D. (3)

5. $p \wedge r$
6. p E.C (5)
7. $p \vee r$ I.D. (6)

|---

8. $p \vee r$ E.D (1, 2 – 4, 5 - 7)

***c. Reglas del Implicador**.*

- ***Eliminación del implicador o Modus Ponens***: De una implicación y su antecedente tomados como premisas, podemos concluir que el consecuente es necesariamente verdadero

$A \rightarrow B$

A

|-----------

B

Ejercicio nº 1.

1. $p \rightarrow q$
2. p
3. $q \vee r \rightarrow s$

|------ s

4. q M. P. (1,2)
5. $q \vee r$ I.D. (4)
6. s M. P. (3,5)

- ***Introducción del Implicador:*** Si suponiendo una premisa cualquiera llagamos a otra premisa, podemos afirmar que la implicación, en la que el antecedente es la premisa supuesta y el consecuente la proposición a la que hemos llegado, es verdadera.

A

B

.

.

.

C

|--------------

$B \rightarrow C$ I.I. (Introducción del implicador)

Ejercicio nº 1.

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$

$\vdash p \rightarrow r$

3. p
4. q M.P. (1,3)
5. r M.P. (2,4)

|------------------------------------

6. $p \rightarrow r$ I.I. (3 – 5)

Se usa para demostrar implicaciones:
1º. Se supone el antecedente.
2º. Se sacan líneas hasta llegar al consecuente.
3º. Una vez logrado, la implicación está demostrada.

Ejercicio nº 2.

1. $p \rightarrow q$
2. $q \vee r \rightarrow s$

$\vdash p \rightarrow s \vee t$

3. p
4. q M.P. (1, 3)
5. $q \vee r$ I.D. (4)
6. s M.P. (2,5)
7. $s \vee t$ I.D. (6)

|--

8. $p \rightarrow s \vee t$ I.I. (3 -7)

Ejercicio nº 3.

1. $p \rightarrow q$
2. r
3. $q \wedge r \rightarrow s$

$\vdash p \rightarrow s$

4. p
5. q M.P. (1,4)
6. $q \wedge r$ I.C. (2,5)
7. s M.P. (3,6)

|--

8. $p \rightarrow s$ I.I. (4 – 7)

d. Reglas del negador.

- ***Eliminación del Negador o Doble Negación***: La doble negación equivale a una afirmación, y a la inversa, una afirmación equivale a una doble negación.

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Ejercicio nº 1.

1. $\neg\neg p$
2. $p \rightarrow q$
3. $\neg\neg(q \rightarrow r)$

$\vdash$ r

4. p — E.N. (1)
5. q — M.P. (2,4)
6. $q \rightarrow r$ — E.N. (3)

$\vdash$

7. r — M.P (5,6)

- ***Regla de Introducción del Negador o "procedimiento de reducción al absurdo"***: No es estrictamente una regla sino un procedimiento alternativo a todo lo que hemos hecho hasta ahora. Hemos utilizado hasta el momento la denominada ***"deducción natural" o "vía directa"***, que consiste en transformar las premisas mediante reglas hasta alcanzar la conclusión. Sin embargo, el procedimiento de reducción al absurdo consiste en ***suponer lo contrario de lo que queremos demostrar*** (la conclusión negada), se procede después deductivamente hasta alcanzar cualquier contradicción. Una contradicción es una formula del tipo $\mathbf{A \wedge \neg A}$.

A

$\neg$ B (Siendo $\neg$ B lo contrario de la conclusión)

.

.

.

$C \wedge \neg C$

$\vdash$

B

6.2. Las Reglas Derivadas.

a. Modus Tollens: de una implicación y la negación de su consecuente, tomadas como premisas, podemos concluir la negación del antecedente.

$A \rightarrow B$
$\neg B$
|-----------
$\neg A$

Ejercicio nº 1.

1. $p \rightarrow \neg q$ } |------- $\neg p$
2. q

|------------------------
3. $\neg p$ M.T. (1,2)

Ejercicio nº 2.

1. $p \rightarrow q$ } |---- $\neg r$
2. $\neg q$
3. $r \rightarrow p$

4. $\neg p$ M.T. (1,2)
|-----------------------------
5. $\neg r$ M.T. (3,4)

Ejercicio nº 3. Combinación de Reducción al absurdo y Modus Tollens.

1. $\neg p \rightarrow q$ } |---- r
2. $\neg p$
3. $q \rightarrow r$

4. $\neg r$
5. $\neg q$ M.T. (3,4)
6. p M.T. (1,5)
7. $p \wedge \neg p$ I.C. (2,6)

|---------------------------------
8. r R.A. (4 -7)

b. Regla de Contraposición: de una implicación podemos deducir otra implicación, en la que el antecedente y el consecuente se inviertan y ambas se nieguen.

$$\frac{A \to B}{\neg B \to \neg A} \quad \text{C.P. Contraposición.}$$

c. Silogismo Disyuntivo: de una disyunción y la negación de una de las proposiciones que la componen, podemos concluir que la otra es necesariamente verdadera.

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B} \ \text{S.D.} \qquad \frac{A \vee B \quad \neg B}{A} \ \text{S.D.}$$

$$\frac{\neg p \vee \neg q \quad p}{\neg q} \qquad \frac{\neg p \vee \neg q \quad q}{\neg p}$$

Ejercicio nº 1. Aplicación de Modus Ponens, Modus Tollens y Silogismo disyuntivo.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \neg p \vee \neg q \\ 2.\ q \\ 3.\ \neg p \to r \\ 4.\ s \to \neg r \\ 5.\ s \vee \neg t \end{array}\right\} \vdash \neg t$$

6. ¬ p — S.D. (1,2)
7. r — M.P. (3,6)
8. ¬ s — M.T. (4,7)

|----------------------------

9. ¬ t — S.D. (5,8)

d. Dilemas: de una disyunción y dos implicaciones tomadas como premisas, podemos deducir el consecuente de las implicaciones o el antecedente de las implicaciones, o una disyunción, siguiendo los siguientes esquemas:

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ A \rightarrow C \\ B \rightarrow C \\ \hline C \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg A \vee \neg B \\ C \rightarrow \neg A \\ C \rightarrow \neg B \\ \hline \neg C \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ A \rightarrow C \\ B \rightarrow C \\ \hline C \vee D \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg A \vee \neg B \\ C \rightarrow \neg A \\ C \rightarrow \neg B \\ \hline \neg C \vee \neg D \end{array}$$

e. Propiedades de las Conectivas:

- ***Propiedad Conmutativa de la Conjunción***: de una conjunción tomada como premisa podemos concluir otra conjunción en la que las proposiciones que la componen invierten su lugar.

$$\begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline B \wedge A \end{array} \qquad \text{C.C.}$$

- ***Propiedad Conmutativa de la Disyunción***: de una disyunción tomada como premisa podemos deducir otra disyunción, en la que la proposición que la componen invierten su lugar.

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \hline B \vee A \end{array} \qquad \text{C.D.}$$

- ***Propiedad Asociativa de la Conjunción***: de una conjunción tomada como premisa podemos concluir otra conjunción en la que las proposiciones que aparecen se agrupen con paréntesis de forma diferente.

$$\begin{array}{l} A \wedge (B \wedge C) \\ \hline (A \wedge B) \wedge C \end{array} \qquad \text{A.C.}$$

Nota: dada esta propiedad aplicamos la ley de economía de paréntesis, es decir, en las conjunciones no usamos paréntesis.

- ***Propiedad Asociativa de la Disyunción***: de una disyunción tomada como premisa, podemos concluir otra disyunción en la que las proposiciones que aparecen se agrupan con paréntesis de forma diferente.

$A \vee (B \vee C)$
|----------------
$(A \vee B) \vee C$ A.D.

- ***Propiedad Distributiva de al Conjunción***: de una conjunción tomada como premisa, si una de las proposiciones es una disyunción podemos concluir una disyunción entre dos conjunciones.

$A \wedge (B \vee C)$
|-------------------------
$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ D.C.

- ***Propiedad Distributiva de la Disyunción***: de una disyunción tomada como premisa, si una de las proposiciones es una conjunción podemos concluir una conjunción entre dos disyunciones.

$A \vee (B \wedge C)$
|--------------------------
$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ D.D.

Ejercicio nº 1.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ (p \vee q) \vee (p \wedge r) \\ 2.\ (p \vee q) \rightarrow s \\ 3.\ (p \wedge r) \rightarrow s \end{array}\right\} \quad |\text{-----}\ s \vee t$$

Por reglas derivadas

4. $s \vee t$ Dile (1,2,3)

Por reglas básicas

4. $p \vee q$
5. s M.P. (2,4)
6. $s \vee t$ I.D. (5)

7. $p \wedge r$
8. s M.P. (3,7)
9. $s \vee t$ I.D. (8)

|---

10. $s \vee t$ E.D. (1, 4 - 6, 7 - 9)

Ejercicio nº 2.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ p \vee q \\ 2.\ (q \vee p) \rightarrow (r \vee s) \\ 3.\ t \rightarrow \neg(s \vee r) \end{array}\right\} \quad |\text{-----}\ \neg t$$

$$\begin{array}{ll} 4.\ q \vee p & \text{C.D. (1)} \\ 5.\ r \vee s & \text{M.P. (2,4)} \\ \hline 6.\ \neg t & \text{M.T. (3,5)} \end{array}$$

Ejercicio nº 3.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ p \vee (q \vee r) \\ 2.\ \neg r \\ 3.\ s \end{array}\right\} \quad |\text{-------}\ (p \vee q) \wedge s$$

$$\begin{array}{ll} 4.\ (p \vee q) \vee r & \text{A.D. (1)} \\ 5.\ p \vee q & \text{S.D. (2,4)} \\ \hline 6.\ (p \vee q) \wedge s & \text{I.C. (3,5)} \end{array}$$

Ejercicio nº 4.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ p \wedge (q \vee \neg r) \\ 2.\ \neg (p \wedge \neg r) \\ 3.\ (p \wedge q) \rightarrow s \end{array}\right\} \quad |\text{-----}\ s$$

$$\begin{array}{ll} 4.\ (p \wedge q) \ \vee\ (p \wedge \neg r) & \text{D.D. (1)} \\ 5.\ p \wedge q & \text{S.D. (2,4)} \\ \hline 6.\ s & \text{M.P. (3,5)} \end{array}$$

- ***Propiedad Transitiva de la Implicación o Silogismo Hipotético***: de dos implicaciones tomadas como premisas, si el consecuente de una de ellas es el antecedente de la otra, se puede concluir una nueva implicación con el antecedente de la primera y el consecuente de al segunda.

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B & \\ B \rightarrow C & \\ \hline A \rightarrow C & \text{S.H.} \end{array}$$

f. Leyes de Interdefinición: estas leyes se utilizan para transformar unas conectivas en otras.

- Las más conocidas de estas leyes son las llamadas ***Leyes de Morgan***, que se utilizan para trasformar conjunciones en disyunciones, y a al inversa. El procedimiento es el siguiente:

- Se niega la fórmula completa , se niega cada una de las proposiciones que forman la conjunción o la disyunción, y se cambia la conectiva.

$$\begin{array}{ll} A \vee B & \\ \hline \neg(\neg A \wedge \neg B) & \text{D.M.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A \wedge B & \\ \hline \neg(\neg A \vee \neg B) & \text{D.M.} \end{array}$$

Ejercicio nº 1. Trasformar por las Leyes de Morgan las siguientes proposiciones:

a.
$$\begin{array}{ll} p \wedge q & \\ \hline \neg(\neg p \vee \neg q) & \text{D.M.} \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{llll} \neg(p \vee \neg q) & & & \\ \hline \neg\neg(\neg p \wedge \neg\neg q) & = & (\neg p \wedge q) & \text{D.M.} \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{ll} p \wedge \neg q & \\ \hline \neg(\neg p \vee q) & \text{D.M} \end{array}$$

Ejercicio nº 2.

1. $\neg (p \lor \neg q)$
2. $(\neg p \lor q) \rightarrow r$
3. s
4. $\neg (\neg r \lor \neg s) \rightarrow t$

$\}$ |---------- t

5. $\neg p \lor q$ D.M. (1)
6. r M.P. (2,5)
7. $r \land s$ I.C. (3,6)
8. $\neg (\neg r \lor \neg s)$ D.M. (7)

|---

9. t M.P. (4,8)

Ejercicio nº 3.

1. $p \land q$
2. $r \rightarrow \neg q$

$\}$ |------------- $\neg (r \land s)$

3. q E.C. (1)
4. $\neg r$ M.T. (2,3)
5. $\neg r \lor \neg s$ I.D. (4)

|--------------------------------------

6. $\neg (r \land s)$ D.M. (5)

- ***Interdefinición del Implicador***: Una implicación se puede trasformar en una conjunción negando toda la fórmula, el antecedente se mantiene con el mismo valor y el consecuente se niega.

$A \rightarrow B$

|------------------

$\neg (A \land \neg B)$